

状态空间方法 vs 全驱系统方法（II） ——从能控性问题看两种方法论

段广仁

南方科技大学 控制科学技术研究院
哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心

摘要：能控性被公认为是控制系统的重要属性，是控制系统状态空间理论的重要组成部分，是状态空间方法对控制理论的重要贡献。然而客观地讲，不同于稳定性，能控性根本不是控制系统的物理属性，它只不过是一类具体的控制问题的解的存在性而已。另外，状态空间方法下的线性系统的能控性理论是成功的、完备的、漂亮的。而状态空间方法下的非线性系统能控性无论是基本概念还是现有结果都存在许多严重的局限性。我们新近提出了全驱系统方法下的控制系统能控性概念，即完全兼容了线性系统的能控性，又合理地反映了非线性系统的能控性本质，是关于控制系统能控性理论的有效尝试。

关键词：控制理论，非线性控制，能控性，状态空间方法，全驱系统方法

0 引子

能控性是状态空间方法的重要组成部分，也被认定是状态空间方法对控制理论的重要贡献！然而关于状态空间方法下的能控性，有很多问题我们还没有真正弄清楚。

能控性的本质是什么？

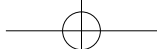
能控性是系统的物理属性吗？

能控性一定是控制理论中不可或缺的概念吗？

非线性系统的能控性到底该如何定义？

上述这些基本问题长期困扰着我们。“不见庐山真面目，只缘身在此山中”。如果仅站在状态空间方法的角度去看待能控性，这些基本问题很难得到圆满的答案。

新近我们提出了控制系统设计的高阶全驱系统方法^[1-13]。在上一篇杂文《状态空间方法 vs 全驱系统方法（I）——从全局镇定问题看两种方法论》中，我们比较了两种方法论在处理控制系统镇定问题时的优势。本文则进一步论证了状态空间方法下的非线性控制系统能控性理论存在的问题，并从高阶全驱系统方法论的角度重新定义了动态控制系统的能控性。



1 原始定义与存在的问题

1.1 Kalman 的能控性定义

1960 年, R. E. Kalman 发表了他的开创性论文《On the General Theory of Control Systems》, 提出了统治控制理论半个多世纪的状态空间方法, 为现代控制理论的发展奠定了基础, 也给数学在控制领域中的应用提供了广阔的空间。

这篇论文的另一个被公认的重大意义在于开创性地提出了控制系统的能控性理论, 给出的控制系统能控性基本定义可以表述如下 (原文见图 1):

A state x of a plant is said to be 'controllable' if there exists a control signal $u_1(t)$ defined over a finite interval $0 \leq t \leq t_1$ such that $\Phi(t_1; x, 0) = 0$. In general, the time t_1 will depend on x . If every state is controllable, the plant is said to be 'completely controllable'

图 1 Kalman 的能控性定义

如果存在一个无约束的容许控制, 使得系统在这个控制的作用下, 从某初值出发的运动轨线经过一定时间后可以被转移到原点, 则称此初值是系统的一个能控状态。如果状态空间中的所有非零状态都是系统的能控状态, 则称系统是完全能控的。

严格说来, Kalman 的上述能控性定义是针对线性定常系统的 (而且是单输入的)。不难看出, 他是用系统的解来定义能控性的。由于线性系统的解可以解析地获得, 所以他成功地获得了线性系统能控性的有效、实用的判据。

20 世纪 60—70 年代, Kalman 的工作和思想得到了众多科学家的认可, 对一阶状态空间方法的普及起到了极大的促进作用。他的能控性概念自然也得到了人们的广泛认可和多方推广。然而, 人们在将能控性从线性推广到非线性的过程中, 仍然照搬照抄 Kalman 的思路, 仍然利用系统的解来定义能控性就有问题了。由于没有人能够给出一般非线性系统的解析解, 所以基于系统的解来定义非线性系统的能控性从一开始就注定是一个败笔。

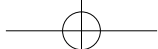
1.2 存在的问题

非线性系统的求解很复杂, 利用系统的解来定义非线性系统的能控性自然导致今天状态空间方法下的能控性理论存在一系列问题。

1) 从数学到数学, 结果不便于应用

如果说控制理论中存在脱离实际应用、陷入抽象数学研究的内容, 那首先要数非线性控制系统的能控性分析了。许多工作从问题的描述到中间的推演, 以至于到最后结果的表述, 都没有跳出李代数、微分流形和场论等一些抽象数学分支的范畴, 距离实际应用较远。

1982 年, 美国数学家、著名的 Bellman 动态规划创始人 Richard Bellman 的学生 John Casti 在其题为



《Recent Developments and Future Perspectives in Nonlinear System Theory》的综述论文中指出：“... seeking a completely general theory of nonlinear systems is somewhat akin to the search for the Holy Grail: a relatively harmless activity full of many pleasant surprises and mild disappointments, but ultimately unrewarding”。该段文字被高为炳院士翻译为：“寻找一个完全通用的非线性系统理论有点类似于寻找圣杯，是相对无害的活动，充满了许多愉快的意外和轻微的失望，而最终则是白费力气^[15]。”

状态空间方法框架下的非线性系统能控性研究就属于这种情况——偶有意外的惊喜和失望，但距离解决问题永远很遥远，且结果的实用性差。这一问题极其困难，但数学家们还是津津有味、自得其乐地操持着微分几何、李代数、场论等抽象数学工具，凭着“蚂蚁啃骨头”的精神，做着一点点的推进。不仅仅是推导过程，许多工作的最后结果表述也都是李导数和微分流形，整个工作几乎就是抽象数学，让控制科学家都望而却步，更不用说众多的控制工程师了。

举个例子，下述形式的双线性系统

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i(t) B_i x$$

能控的充要条件是 $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}_L$ 传递。这就是李群、李代数条件，说起来简单，但对于很多人来说搞明白很难。

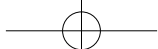
2) 定义繁多、五花八门

进入到非线性系统范畴，人们提出了各种各样、五花八门的能控性定义，如 global controllability; local controllability; relative controllability; closed controllability; strong controllability; weak controllability; vibrational controllability; norm-controllability; N-step controllability; asymptotical controllability 等。进入到非线性系统范畴，人们提出了各种各样、五花八门的能控性定义（见图2）。值得说明的是，这其中的许多能控性定义并不是出自问题本身的需要。由于非线性系统能控性的复杂性，人们在研究的过程中，很多情况下是根据个人的需要、根据论文中的条件需要提出来的。不是非线性的能控性内容丰富，而是在给不出一般问题的解的情况下根据推导的需要不得已提出来的。

当人们谈及能控性的时候，其实多半都是在不加说明地谈线性系统的能控性。因为非线性系统的能控性实在无从谈起。如果不是明确看到具体的某个定义，我们根本不知道所说的是哪种能控性。在非线性能控性的问题上，如果不是密切合作者，就几乎没有共同语言。

3) 有些能控性不支持系统镇定设计

线性系统理论告诉我们，能控必可稳。这一点人们自然希望非线性系统的控制理论也能遵循。控制系统微分几何方法的创始人之一，R. W. Brockett 对此给出了明确的说法，“... a reasonable form of local controllability implies the existence of a stabilizing control law”。然而，事与愿违，Brockett 对此却给出了反例，“provides a counter example to the oft repeated conjecture”。他在文[14]中指出：“Whereas it might have been suspected that controllability would insure the existence of a stabilizing control law, Theorem 1 uses a degree-



theoretic argument to show this is far from being the case.”

关于这一点，已故的高为炳院士也有过论述。他在文[15]中明确指出“非线性系统的能控性（结果）和镇定之间的关系是不明显的”。

“系统能控，然而却找不到甚至不存在适当的镇定控制律”，这样的事实说明了什么，说明了状态空间的能控性理论存在严重的混乱现象。

4) 体系上存在问题

状态空间方法体系下的能控性只是针对一阶状态空间模型提出的。不是状态空间模型表述的系统就无法定义其能控性。可在人们的常规认识中，任何其他形式的系统也都应该拥有能控性概念。

比如说，对于输入输出形式描述的线性系统，一个自然的想法便是通过其状态空间实现的能控性来定义其本身的能控性。但一个输入输出系统可能既有能控的状态空间实现，也有同时有不能控的状态空间实现。这种二义性让我们无法决定一个输入输出系统究竟是否能控。

有人说，我们可以用输入输出系统的最小实现的能控性来定义输入输出系统的能控性啊，这样岂不是没有二义性了吗？岂不是解决了能控性不确定的问题吗？是的，二义性是没有了，但能控性也没有了。因为这样做的结果是所有的输入输出系统全都是能控的了，也就没有再定义其能控性的必要了。

这一事实说明，状态空间体系下的控制系统能控性只是状态空间方法的专属，不适合其他形式的系统，在体系上存在问题。

2 看穿线性系统的能控性

能控性和稳定性不同，根本不是控制系统的某种物理属性。它是一个非常具体的控制问题的解的存在性。

2.1 控制系统设计问题三要素

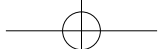
当数学家面对一个问题的时候，他们的第一反应是要考虑问题的解的存在性，考虑问题的解的存在条件。如果问题的解存在且唯一，则进一步考虑问题的求解；如果问题的解存在且不唯一，则进一步考虑建立问题的一般解，即给出问题的部分或整体解集合。

能控性究竟是一个什么样的具体控制问题的解的存在性呢？下面让我们从控制系统的设计问题谈起。控制系统设计问题的三要素是系统、控制律和设计要求。

一个线性系统控制系统设计问题的第一要素当然是线性系统本身。其第二要素一般包括三类控制律形式：状态反馈、输出反馈和动态补偿器，而动态补偿器还有多种形式。设计要求是指闭环系统所满足的期望条件。而线性系统常见的设计要求包括极点配置、干扰解耦、极小化二次型性能指标等。

根据上述理解，我们来看看 Kalman 定义的能控性问题的三要素：

- 系统，即为线性系统。
- 控制律，在定义中没有明确，但后来人们发现其控制律实际上就是线性状态反馈。



- 设计要求，任何非零状态都可以被驱回原点。为叙述方便，我们下面简称这一条件为解的可驱条件或状态可驱条件。

2.2 能控性的本质

能控性是 Kalman 的杰作，是时域控制理论较早期的成果。受历史发展水平的局限，人们对于许多问题本质的认知存在较大的局限性。Kalman 的能控性问题有两个方面是不太明确的。首先是控制律方面，没有明确是线性状态反馈控制律。其次是在系统设计的要求方面使用了“状态可以被驱回原点”这种描述性说法。

1967 年，加拿大控制科学家 Wonham 证明了线性系统能控的充要条件是其可在线性状态反馈控制律下实现极点任意配置。换言之，就是 Kalman 的能控性问题等价于下述极点配置问题。

问题 PA：给定一个线性系统和任意指定的一组共轭复数，求取系统的一个线性状态反馈控制律，使得闭环系统的极点恰好为该组复数。

上述极点配置问题的解的存在性，就是线性系统的能控性。如果当时 Kalman 能够看到这一点，就不会用上述的线性系统的能控性定义了，取而代之的应该是线性系统能控性的如下定义：

如果一个线性系统可以用线性状态反馈控制律实现任意极点配置，也即上述问题 PA 有解，则称该系统是能控的。

由此可见，能控性根本不是系统的物理属性，而是上述具体问题 PA 的解的存在性。

2.3 能控性概念是不可或缺的吗？

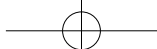
由上节可见，线性系统的能控性是线性系统状态反馈极点配置问题的解的存在性。可是对于线性系统而言，还有输出反馈极点配置问题，还有动态补偿器极点配置问题。这两个问题的解的存在性又是什么呢？什么都不是！人们不再有兴趣给它们起什么名字了。

动态补偿器控制方式还至少包含四种形式：基于全维状态观测器的、基于降维状态观测器的、基于 Luenberger 观测器的和直接动态反馈的。这样，除去状态反馈还有五种控制方式。

系统设计的要求又有多少呢？除了极点配置，还有各种干扰解耦和抑制要求、最优控制要求、各种渐近跟踪要求等等。姑且假设这些设计要求共有 20 种，那么这些因素的组合要产生多少个具体的控制问题呢？答案是 100 个！然而，这 100 个问题的解的存在性有没有名字都不重要了，人们没有必要再针对这些问题的解的存在性定义什么相应的能控性了！

可见能控性并非是什么物理上的需求，纯粹是控制科学家在创建控制理论体系的过程中因需引入的一个概念而已。能控性与稳定性不同，是科学家开展理论分析工作的需要，它本质上是可有可无的！

当然，能控性也有它存在的道理。一方面，状态反馈极点配置是一个最基本的问题，其解的存在性自然非常重要。相应地，能控性条件自然也是控制系统设计中最基本的条件之一。另一方面，这一概念确实为控制科学家表述问题提供了极大的方便。当然，如果没有这个概念，一切也都照常运转。我们只需把各种问题中出现的能控性假设换成“系统可以用状态反馈任意极点配置”，或者换成某个矩阵（指



能控性矩阵)行满秩即可。

3 从线性到非线性

关于控制系统的能控性,其实更多的人只是了解线性系统的能控性,因而产生了“状态空间方法建立了完备的控制系统能控性理论”这一错觉。

人们习惯于按照自己的理解来看待和说明问题。不了解非线性系统能控性的人们也习惯于基于对线性系统能控性的理解来杜撰和想象非线性系统的能控性。然而,这其中的差异用天壤之别来形容也绝不过分。

3.1 原始定义的误导

模仿是人和动物的本能,也是推动科技进步的一方面动力。但有些情况下只限于表层的模仿自然无法反映事物的本质。

Kalman 的能控性定义本来就很容易推广:只须把系统变成相应的非线性系统,其他方面不须做太大变化就可以了。正因如此,很多研究非线性系统能控性的学者们都采用了这一学术路线。但如前所述,由于这一定义需要求解线性系统的解析解,自然导致问题非常棘手,给不出好的结果,致使人们在研究的过程中,根据中间结果的需要引入了各种各样的能控性定义,而且还出现了有悖常理的矛盾现象。

我们已经看到了,线性系统能控性的原始定义可以很容易地推广到非线性系统(表层的推广),但也很容易使人迷惑,看不清能控性的本质。表面上看是一张“馅饼”,但实际上则是个“陷阱”。

3.2 线性系统情形的类比

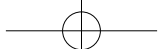
由前述可知,线性系统的能控性是线性系统状态反馈极点配置问题的解的存在性。线性系统的控制问题有很多,约有 100 个。而能控性是在这 100 个控制系统设计问题之中选出的一个具体控制问题的解的存在性。清楚了这件事情,我们该如何看待非线性系统的能控性呢?我们也来挑选一个非线性控制系统设计问题吧,然后通过这一问题的解的存在性来定义非线性系统的能控性。

首先,非线性系统是什么样的系统?它的种类有多少?范围有多大?其次,非线性系统的反馈控制律形式有多少?其中的状态反馈控制律形式又有多少?反馈中的非线性关系是怎样的?是光滑的还是非光滑的?是连续的还是跳变的?最后,非线性系统的控制系统设计要求又有多少?除了我们知道的常规线性系统的设计要求,是不是还有一些特定的针对非线性的控制系统设计要求呢?这么多复杂的系统、控制律和设计要求的组合会形成多少个控制系统设计问题呢?1000 个够不够呢?

请问,我们要从这 1000 个问题当中选择哪一个,然后将其解的存在性定义为非线性系统的能控性呢?这样的一种抉择是不是会让任何人都无所适从,束手无策呢?

3.3 硬撑、放弃还是另辟蹊径?

大家看明白了吗?在状态空间方法的框架下,一般非线性系统的能控性几乎是一个无解的问题。



话说到这里，一定有人不同意。因为还有控制系统的微分几何方法呀！

控制系统的微分几何方法应该是抽象数学在控制系统理论中的成功应用。特别在能控性方面，人们针对控制系统的弱能控性给出了充要条件并建立了结构性分解理论。这些结果充分体现了数学的特点，在表现形式上非常简洁、漂亮，看起来又高深莫测，特别地高大上。相信这些结果的获得也是极其地不容易。然而，这些结果却非常不好理解，实际应用也不甚方便。但这显然不是数学家的错，只怪我们控制科学家和工程师的数学水平太低了。客观地说，数学家们关于非线性能控性这一难题能够做出这些漂亮结果足以让我们心悦诚服、叹为观止了。

控制系统微分几何方法的功绩是显著的。它是抽象数学在控制应用中的一个巨大胜利，是一项伟大的成就！然而，弱能控性问题毕竟不是原始的能控性问题，它的提出也是在原始问题不得解的情况下退一步求其次的结果。直到现在，微分几何方法对于解决一般的原始的能控性问题也是无能为力的。

前面说了，控制系统的能控性问题本来就不是一个不可或缺的控制理论问题。现在面对非线性系统能控性这样一个无从下手的问题，我们是不是更倾向于放弃非线性系统的能控性问题呢？我们只须在控制系统理论研究中，针对每一个非线性控制系统设计问题，分别研究它们的解的存在条件和求解方法，又何必非要找到一个与线性系统状态反馈极点配置问题相对应的某一个来定义能控性呢？

控制理论的真正目的是要建立有效的控制系统设计方法，解决实际控制问题。很多情况下，我们带着目标出发，但走着走着却迷失了目标，在一些枝节问题上纠缠不休。

我们来看一个事实。

国内外任何一本关于线性系统理论的著作，几乎都有关于能控性的一章。然而，国际上关于非线性系统理论的许多著作，比如说，国际上最受认可的 Isidori 所著的《Nonlinear Control Systems》^[16,17]，就没有谈及能控性。这也是一种智慧，不受传统体系的局限，不受传统思维的影响。因为能控性不是控制系统的一种物理属性，不是非得定义不可，不是非得研究不可。

放弃固然可以。但如果我们能够跳出状态空间方法的圈子，从根本上转换一下思想，换一种思路，有没有可能柳暗花明呢？

4 能控性与全驱性

4.1 全驱系统与全驱系统方法

全驱系统是那么一类系统，它们贵族般地存在，基本的物理特征是其每一个自由度都受直接的控制作用。例如，机械臂的每个关节都安装了一个驱动电机；卫星的俯仰、偏航和滚动方向上都有驱动飞轮或者是控制力矩陀螺；……。

由于牛顿定律、动量（矩）定理等物理定律的存在，这些全驱系统多是以二阶系统的形式存在。然而，一旦把高阶全驱系统化成一阶系统，全驱特性就不复存在了。

全驱系统具有其他系统无与伦比的控制特性：它的全驱特性允许我们对消掉开环系统的所有动态特

性（无论是线性还是非线性的），同时建立全新的期望的闭环动态特性。即使在非线性系统的情况下，也能获得一个期望的定常线性闭环系统^[1,2,4,10]。

遗憾的是，这一巨大优势在过去的一个世纪里没有得到足够的重视。其背后的一个重要原因是：受物理概念的影响，全驱系统被认为是控制系统的一个很小的部分，不值得广泛研究，因为这个世界上还存在着更多的欠驱系统，如柔性机械臂和挠性卫星等。

为了解决这一问题，我们把“全驱”这一物理概念在数学上做了推广。推广后的高阶全驱系统仍然具有这样得天独厚的控制特性：存在控制律使得闭环系统为线性，且闭环特征多项式可以任意配置，即可建立全新的期望的闭环动态特性。有了推广的全驱系统概念，欠驱系统就可以通过升阶消元化为（或部分化为）高阶全驱系统。另一方面，实际物理系统也可以通过机理建模来获得（或部分获得）其高阶全驱系统模型。因此，高阶全驱系统模型便成为几乎能够描述所有的非线性控制系统的模型，从而构成动态系统的面向控制的数学模型（Model for Control）。基于系统的高阶全驱系统模型来进行系统分析和设计的方法就是高阶全驱系统方法^[1-13]。

4.2 线性系统能控性的等价条件

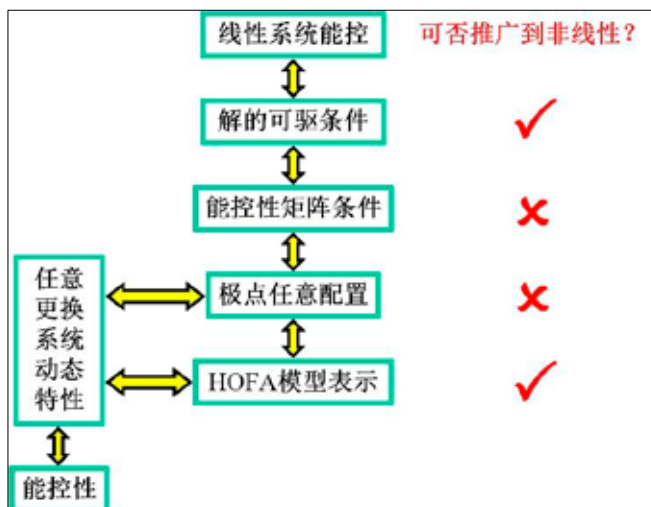
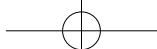


图2 线性系统能控性等价条件

关于线性系统的能控性，我们首先有能控性的传统定义，即状态的可驱条件。然后就是众所周知的两个等价条件，一是系统的能控性矩阵行满秩，二是存在其状态反馈控制律使得闭环极点任意配置（见图2）。

除此之外，还有另一个鲜为人知的等价条件，那就是一个线性系统能控的充要条件是其可等价地化为一个高阶全驱系统。这是我们新近证明的结论，对于连续的线性系统和离散的线性系统都是成立的^[2,18]。也就是说，我们可以将高阶全驱系统模型视为线性系统的一种能控标准型。这一结论说明一个重要事实：线性系统的能控性与某高阶动态模型（High-order Fully Actuated Model）的全驱特性是等价的。



4.3 哪些条件可以推广到非线性系统?

先来提及一个人们公认的数学原则：一件事物的任何等价条件都可以作为该事物的定义。现在就让我们来研究一下图 3 中的几个能控性等价条件，看看哪些可以推广到非线性系统。

首先，解的可驱条件，也就是线性系统能控性的传统定义，当然是可以推广到非线性系统的。研究非线性系统能控性的众多学者们就是这样做的。但事实已经证明，这条推广路线的效果是无法令人满意的。

其次，接下来的两个等价条件显然都不能推广到非线性系统，因为非线性系统无法定义其能控性矩阵，另外也没有极点这一概念。

最后，就剩下高阶全驱系统模型表示这一条件了。这一条件是否可以推广到非线性系统呢？答案是肯定的。因为高阶全驱系统模型就是针对非线性系统提出来的，就是为了解决非线性系统的全局镇定问题产生的。

上述高阶全驱系统模型的等价条件是高阶全驱系统方法框架下的产物。局限于状态空间方法的框架内，是很难得到这样的充要条件的。由于状态空间方法框架下除了原始的能控性定义外再无其他的等价条件可以推广到非线性系统，所以人们采用非线性系统的解来定义能控性也是不得已而为之，属于无奈之举。一般非线性系统的解无法解析获得，基于系统的解来定义能控性注定是一个难题。难道那些研究非线性系统能控性的数学家们不清楚这一点吗？他们清楚的很，只是别无他途。这是一种“明知山有虎，偏向虎山行”的气概。

5. 重塑能控性

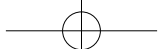
现在我们有了线性系统能控性的高阶全驱系统模型等价条件，而这一等价条件又能推广到非线性系统。这自然为我们定义非线性系统的能控性提供了一条新的途径。

由前述可知，对于高阶全驱系统，存在控制律使得闭环系统为线性，且闭环特征多项式可以任意配置，此即为任意配置闭环系统的动态特性。请问这是什么？这就是再恰当不过的控制系统能控性含义。所以，我们可以引入下述关于动态系统的完全能控性定义^[1,13]：

一个动态系统称为完全能控的，如果它可以等价地化为一个高阶全驱系统。

上述这种能控性的深一层含义是系统可以用状态反馈任意更换闭环动态特性。在线性系统的情况下，就是可以用状态反馈任意配置闭环系统的极点。因此，这一概念彻底兼容了线性系统的情况。另外，这一能控性概念还规避了状态空间方法下能控性概念的几个问题：

- 状态空间方法下的能控性是状态空间模型的专利，其他形式的系统没有能控性；但在上述能控性的定义下，任何系统都有能控性了；
- 在状态空间方法框架下，“能控性（结果）和镇定之间的关系是不明显的”，但在上述定义下，只要获得系统的高阶全驱系统模型，我们便知该系统能控。同时，该系统的全局镇定问题亦可得到解决。因此，能控性分析和系统建模达到了高度的统一；



- 在状态空间方法的框架下，尽管系统能控，系统的镇定控制律设计也要费些周折；但在上述定义下，只要获得系统的高阶全驱系统模型，镇定问题便很容易求解，因而能控性分析和控制系统设计达到高度的统一；
- 在状态空间方法的框架下，能控性通常只是针对确定性连续系统提出的。要想把这一概念推广到复杂的系统，如时间滞后系统、随机系统等，都是一件很复杂的事情。但在全驱系统方法的框架下，上述定义则可以很容易地推广到一些复杂系统上去。

值得指出的是，我们上述的全驱系统指的是无条件全驱的，但有些系统则是有条件全驱的。那些无条件全驱的系统称为全局全驱的或大范围全驱的，简称全驱的。那些有条件全驱的系统则称为亚全驱系统^[10]。

对于亚全驱系统，就有奇异点、奇异点集合和可行点、可行点集合的概念，有几乎全驱和基本全驱的概念，进而有完全能控、亚能控、几乎能控和基本能控的概念，详见参考文献[10]。

6. 兼说可稳性

控制系统的可稳性和能控性有着密切的联系和很强的相似性，被认为是状态空间方法框架下的一对重要概念。

6.1 可稳性的本质

能控性是一类具体的控制系统设计问题的解的存在性。那么可稳性是什么呢？

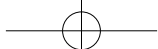
广义上讲，可稳性就是镇定问题的解的存在性。可是镇定问题有多少呢？仅是线性系统的情况，就有状态反馈、静态输出反馈和各种动态输出反馈的情形。到非线性系统层面，各种各样的镇定问题就更多了。

和能控性一样，非线性系统的镇定问题是非常复杂的。退一万步来说，即使针对一类非常特殊的非线性系统，都不能轻易断言其反馈镇定控制律的存在性。因为它即使不存在光滑的反馈镇定律，也可能存在连续的反馈镇定律；即使不存在连续的反馈镇定律，也可能存在切换型的反馈镇定律。

从线性系统状态空间方法的理论体系看，和能控性一样，可稳性也仅仅是控制科学家的一颗“棋子”。人们并没有把所有控制系统的镇定问题都拿来定义相应的可稳性。在线性系统的情况下，人们只是单单瞄准了状态反馈镇定问题，把这一问题的解的存在性定义为线性系统的可稳性。这是科学家们自身的需要，是状态空间方法体系的需要。

类似的问题又出现了。如果将线性系统的可稳性推广到非线性系统，在众多的非线性系统镇定问题中我们选择哪一个镇定问题来定义可稳性呢？和能控性问题一样，这一直是非线性控制理论中没有答案的一个问题。

事实上，事情到了非线性的层面，在状态空间方法的框架下已经很难说清楚了。试图找到一个和线性系统情形对应的可稳性定义是很困难的，也没有什么必要了。人们只须针对每一个具体的镇定问题研究其相应的解的存在性及其镇定控制律的求解方法便可以了。我们看 Isidori 的著作，其中就没有关于能



控性和可稳性的论述，而是直接研究各种设计问题。这至少说明 Isidori 本人对这一点看得很清楚。

6.2 可稳性定义

有些路一开始看似宽广，最后可能引向死胡同；有些路虽然一开始不引人注目，但却可能别有洞天。

现在让我们换个角度，从全驱系统方法论的角度来分析问题，是不是可以更容易、更合理地定义控制系统的可稳性呢？

当我们进行物理系统机理建模的时候，首先应用一系列物理定律求得系统的基础方程。然后利用一些等价变换和变量消元法获得系统的高阶系统模型。最一般的情形是这样的：最终获得的系统的高阶模型包含两部分，一部分是一个高阶全驱系统模型，另一部分是一个自治的高阶系统（即不含控制变量和全驱子系统变量的系统）。此时可分为三种情况：

- 如果后者不存在，即系统等价于一个高阶全驱系统，则该系统是可控的；
- 如果后者存在且稳定，则称该系统是可稳的^[10]，这便是控制系统可稳性的定义。它和线性系统的情形是完全兼容的；
- 如果后者存在但不稳定，则称该系统是不可稳的^[10]。

在控制系统设计中，如果系统可稳，我们不用管其中稳定的自治系统，只需对高阶全驱系统部分设计镇定控制律即可，详见参考文献[10]。如果系统是不可稳的，其自治系统是不稳定的。此时，无论我们如何改造可控的高阶全驱系统部分都是徒劳的，整个系统都不可能实现稳定。

7 结束语

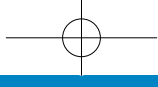
状态空间方法是以状态空间模型为基础的方法论。全驱系统方法是以高阶全驱系统模型为基础的方法论。二者在处理系统控制问题上的差异是巨大的。

对于线性系统来说，其状态空间方法框架下的控制系统能控性分析理论是完备和完美的。然而这一理论长期以来却未能成功地推广到非线性系统。虽然人们常说状态空间方法的一个重要贡献是建立了控制系统的能控性分析理论，但这种说法实际上只局限于线性系统的情形。因为非线性系统的能控性无论在定义上还是结果上都没有形成一个合理、可用的体系。

控制系统的分析问题和设计问题是密切相关的。状态空间方法框架下的系统镇定问题不能得到很好解决的一个真正原因就是非线性系统能控性分析问题没有得到很好的解决。如今全驱系统方法的提出极大地改善了系统镇定问题的求解，自然在解决控制系统的能控性分析问题上也显示了其强大的优越性。

状态空间方法下的基本非线性系统的能控性问题已经如此之难，关于更加复杂的非线性系统，如时变的非线性系统和带有时滞的非线性系统，其难度是无法想象的。仍然从系统的解的角度去分析这些系统的能控性简直就是天方夜谭。然而，在全驱系统方法方法的框架下，这些复杂非线性系统的能控性却都可以类似地定义，并且与其镇定问题建立了直接的关系^[19-22]。

从状态空间方法到全驱系统方法的改变，是方法论上的改变，是整个控制学科的根本性改变。希望国内控制界人士和机构能够大力支持这一原创性理论的研究，推动非线性控制理论的发展。



参考文献

- [1] 段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱系统与参数化设计[J]. 自动化学报, 2020, 46(7): 1333–1345.
- [2] 段广仁. 高阶系统方法—II. 能控性与全驱性[J]. 自动化学报, 2020, 46(8): 1571–1581.
- [3] 段广仁. 高阶系统方法—III. 能观性与观测器设计[J]. 自动化学报, 2020, 46(9): 1885–1895.
- [4] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part I. Models and basic procedure," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 2, pp. 422–435, Oct. 2020.
- [5] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part II. Generalized strict–feedback systems," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 3, pp. 437–454, Oct. 2020.
- [6] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part III. Robust control and high–order backstepping," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 5, pp. 952–971, Dec. 2020.
- [7] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part IV. Adaptive control and high–order backstepping," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 5, pp. 972–989, Dec. 2020.
- [8] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part V. Robust adaptive control," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 10, pp. 2129–2143, Feb. 2021.
- [9] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VI. Disturbance attenuation and decoupling," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 10, pp. 2161–2181, Feb. 2021.
- [10] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VII. Controllability, stabilizability and parametric design," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 52, no. 14, pp. 3091–3114, May 2021.
- [11] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VIII. Optimal control with application in spacecraft attitude stabilization," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 53, no. 1, pp. 54–73, 2022.
- [12] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part IX. Generalized PID control and model reference tracking," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 53, no. 3, pp. 652–674, 2022.
- [13] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part X. Basics of discrete–time systems," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 53, no. 4, pp. 810–832, 2022.
- [14] Brockett R. W. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization*. Boston: Differential Geometric Method in Nonlinear Control Theory, Birkhauser, 1983, 112–121.
- [15] 高为炳, 程勉, 夏小华. 非线性控制系统的发展. 自动化学报, 17(5):513–524.
- [16] Isidori A., *Nonlinear Control Systems I*, 3rd ed., Springer Verlag., 1995.
- [17] Isidori A., *Nonlinear Control Systems II*, Springer Verlag., 1999.
- [18] Duan G. R. and B. Zhou, "A frequency–domain approach for converting state–space models into high–order fully actuated models," *J. Syst. Sci. Complex.*, to be published, DOI:10.1007/s11424–022–1361–8.
- [19] Duan G. R., "Discrete–time delay systems: Part 1. global fully actuated case," *Sci. China–Inf. Sci.*, 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3417–3.
- [20] Duan G. R., "Discrete–time delay systems: Part 2. sub–fully actuated case," *Sci. China–Inf. Sci.*, 2022. DOI:10.1007/s11432–021–3448–1.
- [21] Duan G. R., "Fully actuated system approaches for continuous–time delay systems: Part 1. Systems with state delays only," *Sci. China–Inf. Sci.*, 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3459–x.
- [22] Duan G. R., "Fully actuated system approaches for continuous–time delay systems: Part 2. Systems with input delays," *Sci. China–Inf. Sci.*, 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3460–y.